# Лекция 3. Неприменимость методов коммутативной алгебры для непосредственного построения решений линейных систем дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами

Операторный метод Хевисайда позволяет сводить задачу решения уравнений динамики линейных стационарных машин - обыкновенных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами - к чисто алгебраической. В случае переменных коэффициентов (нестационарные машины) дело обстоит значительно сложнее. Существенная трудность связана с тем, что операторы дифференцирования по времени t и умножения на t не коммутируют, и задача построения символа дифференциального оператора с переменными коэффициентами не имеет очевидного решения. Пусть, например, алгебраический полином P(t,p) имеет простейший вид



Какой дифференциальный оператор должен соответствовать этому “символу”? Ведь подстановка t и D в разном порядке дает разные результаты



Этот пример показывает, что исследования поведения, так называемых, нестационарных линейных машин требуют принципиально нового подхода. Ведь в ранее изложенном материале важнейшую роль играли соответствующие алгебраические методы.

Разумеется, с усложнением моделей возрастает роль вычислительной математики, механики, физики и т.д. В условиях применения ЭВМ появляется возможность, отправляясь от начальных условий, шаг за шагом вычислять новые значения вектора состояния независимо от того, стационарна или нестационарна данная система. Принципиальная трудность, связанная с нестационарностью, при численном решении оказывается как бы устраненной. Правда, при этом приходится платить отсутствием конечной формулы для результата и дискретностью аргумента. В условиях зависимости решения от многих параметров это обстоятельство может сильно затруднить исследование. Более того, отсутствие аналитического решения и формальное использование принципиально правильной алгоритмической схемы может привести к необъяснимым результатам. Поэтому серьезное внимание инженер должен уделить пониманию аналитической структуры решений соответствующих уравнений.

## 3.1. Фундаментальная матрица решений однородной системы уравнений. Импульсная переходная матрица. Вид общего решения уравнений динамики управляемой линейной нестационарной машины

Выпишем в общем виде линейную нестационарную систему уравнений, описывающую динамику управляемой системы



вектор-функции  представляются в виде



Здесь **u** - вектор управления, **B** - матрица “дозатор” (distributor) - распределитель управляющих сигналов по координатам системы.

Соответствующая однородная система имеет вид



Фундаментальная система решений линейной однородной системы уравнений представляет собой базисную систему n векторов-столбцов, образующих фундаментальную матрицу **Z**(t). Общее решение однородной системы выписывается в виде



Или иначе





- импульсная переходная матрица системы.

Запишем решение системы уравнений , с помощью импульсной переходной матрицы



Таким образом, проблема построения общего решения , сводится к задаче нахождения импульсной переходной матрицы (фундаментальной системы решений однородной системы).

## 3.2. Кинематически подобные матрицы. Матрицы Ляпунова. Преобразования Ляпунова. Приводимые системы уравнений

Очень плодотворный метод при работе с дифференциальными уравнениями, описывающими динамику машин, состоит в том, чтобы их не решать, а преобразовывать к возможно более простому виду. Рассмотрим зависящую от времени замену вектора **z**(t)



Линейное преобразование вида с невырожденной матрицей, имеющей непрерывно дифференцируемые элементы, ограниченной, имеющей ограниченную производную и строго отличный от нуля определитель, называют преобразованием Ляпунова.

Пусть - преобразование Ляпунова. Подставляя выражение в систему , получим



Следовательно,



Матрицы **A**(t) и **B**(t), связанные между собой преобразованием



называются кинематически подобными.

Таким образом,



С матрицей **B**(t), кинематически подобной матрице **A**(t).

Линейная система называется приводимой, если при помощи преобразования Ляпунова она может быть преобразована в систему с постоянной матрицей **B**.

## 3.3. Теорема Еругина о необходимых и достаточных условиях приводимости системы уравнений в терминах фундаментальных матриц

Линейная система приводима тогда и только тогда, когда ее фундаментальная матрица  может быть представлена в виде



где  матрица Ляпунова, а  - постоянная матрица.

Доказательство необходимости.

Пусть система приводима. Тогда с помощью преобразования она приводится к виду с постоянной матрицей **B**. В этом случае фундаментальная матрица решений системы выписывается с помощью матричной экспоненты



Следовательно,



Доказательство достаточности.

Пусть фундаментальная матрица решений представляется в виде . Сделаем преобразование Ляпунова с матрицей



Тогда получим



С другой стороны



Таким образом, сравнивая и , имеем



## 3.4. Теорема Флоке о представлении фундаментальной матрицы системы уравнений с периодическими коэффициентами

Фундаментальная матрица решений линейной системы с непрерывной периодической матрицей периода Т



всегда может быть представлена в виде



Здесь **P**(t) непрерывно дифференцируемая периодическая матрица с периодом T, **P**(0)=**E**, **В** - некоторая постоянная матрица.

Действительно. Если матрица **Z**(t) является фундаментальной матрицей системы , то матрица **Z**(t+T) также фундаментальна, поскольку



Но в этом случае



Здесь **С** - постоянная матрица с отличным от нуля определителем.

Всегда можно представить матрицу  в виде



с некоторыми матрицами **B** и **P** (**P**(0)=**E**).

Используя соотношение , имеем



Положим . Тогда получим, что



то есть матрица **P**(t) периодична с периодом T.

## 3.5. Теорема Ляпунова о приводимости систем дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами

Линейные системы вида с непрерывной периодической матрицей **A**(t) всегда приводимы.

Действительно, по теореме Флоке фундаментальная матрица решений системы с периодической матрицей имеет вид . Матрица **P**(t) - матрица Ляпунова, так как она периодична и, следовательно, ограничена вместе со своей производной. Следовательно, по теореме Еругина система с периодической матрицей приводима.

# Лекция 4. Системы уравнений с переменными коэффициентами, удовлетворяющие условию Гейзенберга-Лакса

## 4.1. Условие Гейзенберга-Лакса. Матричный коммутатор. L-A пара с постоянной матрицей L. Обертывающее преобразование. Изоспектральность матрицы A(t)

Рассмотрим специальный класс систем с переменными коэффициентами. Пусть матрица  системы уравнений



удовлетворяет соотношению



где **L** - некоторая постоянная матрица.

Соотношение типа будем называть **условием Гейзенберга-Лакса**. Правая часть уравнения носит название “**коммутатор матриц L, A”** и обычно обозначается квадратными скобками



Имеет место следующее **утверждение.**

**Система уравнений , с матрицей A(t), удовлетворяющей условию Гейзенберга-Лакса, приводима** **к системе уравнений с постоянными коэффициентами.**

Действительно. Непосредственной проверкой устанавливаем, что, если матрица **А**(t) удовлетворяет уравнению , то



Иначе говоря, матрицы **A**(0) и **A**(t) подобны, а **exp(Lt) их обвертывающее преобразование.**

Проведем замену переменных в системе . Пусть



Тогда с одной стороны



с другой стороны



Сравнивая , и учитывая соотношение , получаем



Получили систему уравнений с постоянными коэффициентами.

Решение системы уравнений может быть представлено в виде



Во избежание недоразумений отметим, что показатели степени матричных экспонент при их умножении друг на друга, вообще говоря, складывать нельзя, что связано с некоммутативностью операции умножения матриц. Поэтому, вообще говоря,



Замечательным свойством матрицы **A**(t), удовлетворяющей соотношению является ее изоспектральность - независимость собственных значений матрицы **A**(t) от времени.

Действительно, в силу



С другой стороны имеет место тождество



Вычитая из , имеем



Следовательно,



## 4.2. Роль матрицы L в описании временной эволюции модальных столбцов матрицы A(t). Методы нахождения матрицы L

Собственные векторы (модальные столбцы)  характеристической матрицы  удовлетворяют уравнению



Здесь - корни уравнения .

Дифференцируя уравнение по времени, имеем



Следовательно, учитывая ,



Принимая во внимание соотношение , получим



Таким образом, либо



либо, если  - собственный вектор, то  - также собственный вектор, и эти векторы линейно зависимы. Следовательно,



Следовательно, матрица L играет важнейшую роль в описании временной эволюции собственных векторов матрицы **A**(t).

Соотношения , дают возможность, по крайней мере, в некоторых случаях, упростить алгоритм построения матрицы **L**.

Этой же цели служит следующая **лемма.**

Пусть матрица **N**(t), являющаяся решением задачи Коши



удовлетворяет условию . Иначе говоря, **N**(t) - ортогональная матрица. В этом случае **L** - кососимметричная матрица. Действительно,



Следовательно, , то есть - кососимметрична.

# Лекция 5. Пример построения решения системы с переменными коэффициентами

## 5.1. Приведение системы к системе с постоянными коэффициентами

Рассмотрим модельный пример работы с нестационарной линейной системой. Пусть динамика системы описывается уравнением



Прежде всего, обратим внимание на след матрицы системы - сумму элементов матрицы **A**(t), расположенных на главной диагонали. След равен сумме корней характеристического уравнения. Поэтому его постоянство - необходимое требование для выполнения условия Гейзенберга-Лакса. В данном случае след равен нулю.

Характеристическая матрица системы имеет вид



Характеристическое уравнение



Корни характеристического уравнения  постоянны, (матрица **A**(t) переменна, но изоспектральна), и можно надеяться на выполнение условия Гейзенберга-Лакса.

Попробуем найти матрицу **L**. Для этого, исходя из соотношений вида , , выпишем собственные векторы матрицы **A**(t). В качестве собственных векторов можно взять векторы, пропорциональные столбцам матрицы **F**, присоединенной к характеристической, поскольку на спектре



Имеем



Нормируя первый столбец матрицы , положим



Нормируя второй столбец матрицы , положим



Векторы-столбцы  и  образуют ортонормированную матрицу . Учитывая доказанную выше лемму, и используя соотношение , имеем (для вектора )



или (для вектора )



Положим



При таком выборе матрицы **L** условия , будут удовлетворены. Проверяя выполнение условия Гейзенберга-Лакса с матрицей **L** из , убеждаемся в его выполнении.

Таким образом, с помощью замены переменных



система приводится к системе с постоянными коэффициентами



## 5.2. Решение системы с постоянными коэффициентами. Окончательный вид решения

По теореме Гамильтона-Кели матрица **L** удовлетворяет своему характеристическому уравнению. Следовательно,



Матричная экспонента  является решением матричного уравнения типа и может быть представлена в виде



Следовательно, для нахождения коэффициентов  получаем систему скалярных уравнений



решение которой имеет вид



Таким образом,



Решение системы имеет вид



Полученное решение системы показывает, что в данном случае преобразование Ляпунова к системе с постоянными коэффициентами представляет собой плоский разворот. Координатные оси , в которых система стационарна, поворачиваются относительно исходных осей  по часовой стрелке на угол .

Существенный интерес представляет исследование траекторий корней приведенной системы (5.12) с постоянными коэффициентами на комплексной плоскости.

Характеристическое уравнение системы имеет вид



При  , . При  корни действительны, имеют разные знаки, с ростом стремятся к нулю. При  корни чисто мнимы.

Все это разительно отличается от корней характеристического уравнения матрицы **A**(t), которые вообще не зависят от параметра . Но роль корней характеристического уравнения матрицы **A**(t) в представлении решений различных классов нестационарных линейных систем нам еще предстоит рассмотреть, а роль спектра в решении систем с постоянными коэффициентами нами уже выяснена. На вопросы об устойчивости, степени затухания и колебательности решений приводимых систем можно уверенно отвечать, рассматривая поведение решений приведенной системы с постоянными коэффициентами.